

(17)

2018

(100)

4.

Set B

998



Unique Paper Code: 227203

Scheme of Examination: Semester

Name of the Paper: Mathematical Methods for Economics - II (X)

Name of the Course: B.A. (Honours) Economics (P)

Semester: II

Duration: 3 hours

Maximum Marks: 75 Marks

INSTRUCTIONS FOR CANDIDATES:

Answer all questions. Choice is available within each question.

Use of simple calculator is permitted.

सभी पाँच प्रश्नों का उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के भीतर चयन उपलब्ध है।

1. Attempt any four from the parts (a) to (e) in this question.

[6 x 4]

(a) (i) Define linear independence for a set of vectors  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

(ii) Can any of the vectors from the set  $S = \{(2,5,8), (3,7,10), (4,9,12), (0,0,1)\}$  be expressed as a linear combination of the other vectors in S? How many different linearly independent subsets can be formed from the set S.

(b) (i) The matrix  $B$  of order  $n \times n$  is defined as  $B = X(X'X)^{-1}X'$ . What is the order of matrix  $X$ ? Check whether the matrix  $B$  is symmetric and/or idempotent.

(ii) If  $A$  is a matrix of order  $n \times n$ . Prove that trace of  $(A - A')$  is zero, where  $A'$  is the transpose of  $A$ .

(c) A system of linear equations in three variables is given by:  
 $2x - 3y + z = 0, 5x + y - 2z = 3, 6x + 8y - 6z = 6, 9x - 5y = 3.$   
How many equations are superfluous?

What are the degrees of freedom for the equation system?  
Solve the system completely.

- (d) (i) Prove that the rank of a matrix of order  $p \times q$ , cannot be greater than  $\min\{p, q\}$ .
- (ii) A line  $L$  passes through the point  $(2, -1, -2)$  and is normal to the plane with equation  $x - y - z = 12$ . Find the equation of the line  $L$ .
- (e) (i) Prove that if a matrix  $A$  is orthogonal, then its determinant is  $\pm 1$ . Prove also that the converse is not true.
- (ii) The plane  $P$  passes through the point  $(2, 3, 4)$  and is orthogonal to the intersection of the two planes  $x + y + z = 10$  and  $2x + 3y = 20$ . Find the equation of  $P$ .

इस प्रश्न में भागों (a) से (e) में से किन्हीं चार के उत्तर दीजिए।

[6 x 4]

- (a) (i) सदिशों के एक समुच्चय  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  हेतु रेखिकतः स्वतन्त्रता (linear independence) को परिभाषित कीजिए।
- (ii) क्या समुच्चय  $S = \{(2, 5, 8), (3, 7, 10), (4, 9, 12), (0, 0, 1)\}$  के सदिशों में से कोई भी सदिश  $S$  के अन्य सदिशों के रेखीय संयोजन (linear combination) के रूप में व्यक्त किया जा सकता है? समुच्चय  $S$  से कितने भिन्न-भिन्न रेखिकतः स्वतन्त्र उपसमुच्चय बनाए जा सकते हैं?
- (b) (i) क्रम  $n \times n$  का एक आव्यूह (matrix)  $B = X(X'X)^{-1}X'$  से परिभाषित किया जाता है। आव्यूह  $X$  का क्रम क्या है? क्या  $B$  सममित (symmetric) तथा/अथवा आइडेम्पोटेंट (idempotent) है, इसकी जाँच कीजिए।
- (ii) यदि  $A$ , क्रम  $n \times n$  का एक आव्यूह है, तो सिद्ध कीजिए कि  $(A - A')$  का ट्रेस (trace) शून्य है, जहाँ  $A'$ ,  $A$  का पक्षान्तर (transpose) है।
- (c) तीन चरों वाला एक रेखीय समीकरण निकाय (system of linear equations) निम्न प्रकार है:  
 $2x - 3y + z = 0$ ,  $5x + y - 2z = 3$ ,  $6x + 8y - 6z = 6$ ,  $9x - 5y = 3$ .  
कितने समीकरण अनावश्यक (superfluous) हैं?  
इस समीकरण-निकाय की स्वातन्त्र्य-कोटियाँ (degrees of freedom) कितनी हैं?  
इस निकाय को पूर्णतः हल कीजिए।
- (d) (i) सिद्ध कीजिए कि क्रम  $p \times q$  के किसी आव्यूह की कोटि (rank)  $\min\{p, q\}$  से अधिक नहीं हो सकती।

- (ii) एक रेखा  $L$ , बिन्दु  $(2, -1, -2)$  से गुजरती है तथा समीकरण  $x - y - z = 12$  वाले समतल (plane) के लम्बवत् (normal) है। रेखा  $L$  का समीकरण ज्ञात कीजिए।
- (e) (i) सिद्ध कीजिए कि यदि एक आव्यूह लम्बवत् (orthogonal) है, तो इसका सारणिक (determinant)  $\pm 1$  होगा। यह भी सिद्ध कीजिए कि इसका विपरीत सत्य नहीं होता।
- (ii) समतल (plane)  $P$  बिन्दु  $(2, 3, 4)$  से गुजरता है तथा दो समतलों  $x + y + z = 10$  व  $2x + 3y = 20$  के प्रतिच्छेदन (intersection) के लम्बवत् (orthogonal) है।  $P$  का समीकरण ज्ञात कीजिए।

2. Attempt any two from the parts (a) to (c) in this question.

[4 x 2]

- (a) Consider the sets  $A = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, xy \geq 10\}$  and  $B = \{(x, y) | x + y = 1\}$ . Examine the sets  $A \cup B$  and  $A \cap B$  to decide if the sets are closed, bounded and convex.

- (b) Consider the differential equation  $\frac{dy}{dt} = 0.5y(1 - y)$ .

(i) Draw the phase diagram associated with the above differential equation.

(ii) Find all the equilibrium solutions and classify each solution as stable or unstable.

- (c) Check if  $y = \begin{cases} e^x - 1, & x \geq 0 \\ 1 - e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$  is a solution

of the differential equation  $\frac{dy}{dx} = |y| + 1$  on  $(-\infty, \infty)$

इस प्रश्न में भागों (a) से (c) में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए।

[4 x 2]

- (a) समुच्चयों  $A = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, xy \geq 10\}$  व  $B = \{(x, y) | x + y = 1\}$  पर विचार कीजिए। समुच्चयों  $A \cup B$  व  $A \cap B$  की जाँच कीजिए, तथा पता लगाइए कि क्या ये बन्द (closed), परिबद्ध (bounded) तथा अभिसारी (convex) हैं।

- (b) अवकल समीकरण (differential equation)  $\frac{dy}{dt} = 0.5y(1 - y)$  पर विचार कीजिए।

(i) उपरोक्त अवकल समीकरण से सम्बद्ध प्रावस्था आरेख (phase diagram) बनाइए।

(ii) सभी साम्यावस्था हल ज्ञात कीजिए तथा प्रत्येक हल को स्थायी या अस्थायी के तौर पर वर्गीकृत कीजिए।

(c) जाँच कीजिए कि क्या  $y = \begin{cases} e^x - 1, & x \geq 0 \\ 1 - e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$

$(-\infty, \infty)$  में अवकल समीकरण  $\frac{dy}{dx} = |y| + 1$  का एक हल है।

3. Attempt any two from the parts (a) to (c) in this question.

[5 x 2]

(a) For the function  $f(x, y) = 2 \ln(x - 3) + 2 \ln(y - 2)$

(i) Find the domain of the function and sketch the same.

(ii) Draw the level curve at the height 4.

(b) (i) Find the linear approximation to the function  $f(x, y) = x^2 + e^{2y}$  close to the point  $(2, 0)$  in its domain.

(ii) Find all the second order partial derivatives for the function  $f(x, y) = x^y$  at  $(x, y) = (2, 3)$ .

(c) (i) Verify Young's theorem for the function  $f(x, y) = \alpha x^\beta + \lambda e^{xy}$ .

(ii) Examine the definiteness of the quadratic form  $5xy - 2x^2 - y^2$ .

इस प्रश्न में भागों (a) से (c) में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए।

[6 x 2].

(a) फलन  $f(x, y) = 2 \ln(x - 3) + 2 \ln(y - 2)$  हेतु

(i) इस फलन का परास (domain) ज्ञात कीजिए व उसका रेखाचित्र (sketch) बनाइए।

(ii) ऊँचाई 4 पर स्तर वक्र (level curve) बनाइए।

(b) (i) फलन  $f(x, y) = x^2 + e^{2y}$  का इसके परास में बिन्दु  $(2, 0)$  के समीप रेखीय सन्निकटन (linear approximation) ज्ञात कीजिए।

(ii) फलन  $f(x, y) = x^y$  का बिन्दु  $(x, y) = (2, 3)$  पर द्वितीय क्रम का आंशिक अवकलज ज्ञात कीजिए।

(c) (i) फलन  $f(x, y) = \alpha x^\beta + \lambda e^{xy}$  हेतु यंग के प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

(ii) द्विघात रूप (quadratic form)  $5xy - 2x^2 - y^2$  की निश्चितता (definiteness) का परीक्षण कीजिए।

4. Attempt any two from the parts (a) to (c) in this question.

[5 x 2]

(a) (i) Find an expression for  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial y}$  for the function  $f(2x, y/x)$ .

(ii) The equation  $g(x, y, z) = xyz + (x + y)z^2 = 16$  implicitly represents  $z$  as a function of  $x$  and  $y$ . Find the directional derivative of  $z$  at the point  $(x, y, z) = (2, 1, 2)$  in the direction  $(x, y) = (4, 1)$ .

(b) (i) Calculate the elasticity of substitution of  $y$  for  $x$  for the utility function given by

$$U = U(x, y) = \left( \frac{0.3}{x} + \frac{0.7}{y} \right)^{-1}.$$

(ii) The demand function of good  $x_1$  in terms  $p_1$  and  $p_2$ , the prices of the goods  $x_1$  and  $x_2$  given is by  $x_1 = f(p_1, p_2) = p_1^\alpha p_2^a e^{ap_1 + bp_2}$  where  $\alpha, a, b$  are constants. Find the partial elasticity of  $x_1$  with respect to  $p_2$ .

(c) (i) Are the functions  $f(x, y) = x^2 h\left(\frac{y}{x}\right)$  and  $g(x, y) = \ln\left(\frac{y}{x} h\left(\frac{y}{x}\right)\right)$  homogenous? Find the degree of homogeneity in case the functions are homogenous.

(ii) Define homotheticity for the function  $f(x, y)$ . Provide an example of a function that is homothetic but not homogenous.

इस प्रश्न में भागों (a) से (c) में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए।

[5 x 2]

(a) (i) फलन  $f(2x, y/x)$  हेतु  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial y}$  का व्यंजक ज्ञात कीजिए।

(ii) समीकरण  $g(x, y, z) = xyz + (x + y)z^2 = 16$  परोक्ष रूप (implicitly) से  $z$  को  $x$  व  $y$  के फलन के रूप में व्यक्त करता है।  $z$  का बिन्दु  $(x, y, z) = (2, 1, 2)$  पर  $(x, y) = (4, 1)$  की दिशा में दिशात्मक अवकलज (directional derivative) ज्ञात कीजिए।

(b) (i) निम्नलिखित उपयोगिता फलन हेतु  $y$  की  $x$  हेतु प्रतिस्थापन की लोच (elasticity of substitution)

ज्ञात कीजिए:  $U = U(x, y) = \left( \frac{0.3}{x} + \frac{0.7}{y} \right)^{-1}.$

(ii) वस्तु  $x_1$  का वस्तुओं व  $x_2$  की कीमतों, क्रमशः  $p_1$  व  $p_2$  के पदों में मांग फलन  $x_1 = f(p_1, p_2) = p_1^\alpha p_2^\alpha e^{ap_1 + bp_2}$  है जहाँ  $\alpha, a, b$  स्थिरांक हैं।  $x_1$  की  $p_2$  के सापेक्ष आंशिक लोच ज्ञात कीजिए।

(c) (i) क्या फलन  $f(x, y) = x^2 h\left(\frac{y}{x}\right)$  व  $g(x, y) = \ln\left(\frac{y}{x} h\left(\frac{y}{x}\right)\right)$  समघात (homogeneous) हैं? यदि ये फलन समघात हैं तो समघातता की कोटि (degree) ज्ञात कीजिए।

(ii)  $f(x, y)$  हेतु होमोथेटिकता (homotheticity) को परिभाषित कीजिए। एक ऐसे फलन का उदाहरण दीजिए जो कि होमोथेटिक है पर समघात नहीं।

5. Attempt any three from the parts (a) to (d) in this question. [7 x 3]

(a) A firm's production function for a good  $X$  is given by  $x = 25 - \frac{2}{L} - \frac{1}{K}$ , where  $x$  is the number of units of good  $X$  produced and  $L$  and  $K$  are the quantities of labour and capital used up in the production. The prices of  $X$ ,  $L$  and  $K$  are  $p$ ,  $w$  and  $r$  respectively. If profit is defined as the revenue from the sale of  $X$  less the cost incurred in the purchase of  $L$  and  $K$ , write out the profit function. Calculate the amount of  $L$  and  $K$  required to maximize profit. Also calculate the profit maximizing level of output.

(b) An individual maximizes her utility function  $U(x, y) = \frac{2x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$  subject to her fixed income  $M$  that is used to purchase goods  $x$  and  $y$  with prices  $p_x$  and  $p_y$ . What is her optimum level of consumption of goods  $x$  and  $y$ ? What is the impact on her utility due to a unit increase in  $p_x$ ?

(c) Find the stationary point(s) for the function  $h(x, y) = (x - 5)^2 ye^{x+2y}$ . Classify these points as local maxima, local minima or saddle points.

(d) For the function  $f(x, y) = xy$  defined on the domain  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 6x - 8y \leq 21\}$ , find the global maximum and minimum values.

इस प्रश्न में भागों (a) से (d) में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिए।

[7 x 3]

This question paper contains ~~16~~ printed pages

Roll No.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

S. No. of Question Paper : 4457

Unique Paper Code : 12271201

Name of the Paper : Introductory Macroeconomics

Name of the Course : B.A. (H) Eco.

Semester : II

Duration : 3 Hours

Maximum Marks : 75

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

Note :— Answer may be written either in English or in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी :— प्रश्नों के उत्तर अंग्रेजी या हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिये, परन्तु सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

Answer any five questions.

All questions carry equal marks.

किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

P.T.O.

(a) Explain briefly the following concepts:

(i) Business fixed investment

(ii) Capital account.

3

(b) Assume people of the country expect inflation to be equal to 5 percent by the end of the 20th Century but in fact, prices rise by 20 percent over these ten decades.

Describe how this unexpectedly high inflation rate would help or hurt the following :

5

(i) Firm that provides a fixed nominal pension when the worker retires.

(ii) A person taking out a mortgage in 1950 for 50 years.

(c) Suppose the government increases the expenditure. Use the IS-LM model to show the impact of the increase in government expenditure under two assumptions :

(i) The government keeps interest rates constant through an accommodating monetary policy.

(ii) The money stock remains unchanged.

Use suitable diagram

7

(अ) निम्नलिखित अवधारणाओं की संक्षिप्त व्याख्या कीजिए :

(i) व्यवसाय स्थिर निवेश

(ii) पूँजीगत खाता।

(ब) मान लीजिए कि एक देश के लोग 20वीं शताब्दी के अंत तक 5 प्रतिशत स्फीति की अपेक्षा करते हैं। परन्तु वास्तव में इन दस दशकों में कीमतें 20 प्रतिशत से बढ़ जाती हैं। व्याख्या कीजिये कि कैसे यह गैर-अपेक्षित ऊँची स्फीति दर निम्नलिखित को लाभ पहुँचाएगी या हानि :

(i) मजदूरों की सेवानिवृत्ति पर एक फर्म द्वारा प्रदान की गई स्थिर सांकेतिक पेंशन।

(ii) एक व्यक्ति द्वारा 1950 में 50 वर्षों के लिए रखा गया गिरवी सामान।

(स) मान लीजिए कि सरकार व्यय बढ़ाती है। IS-LM मॉडल द्वारा चित्र की सहायता से सरकारी व्यय में वृद्धि के आय स्तर व ब्याज दर पर प्रभाव को निम्नलिखित दो मान्यताओं की स्थिति में दर्शाइए :



- (i) मिलनसार मौद्रिक नीति द्वारा सरकार ब्याज दर को स्थिर रखती है।
- (ii) मुद्रा का स्टॉक व कीमत स्तर में कोई बदलाव नहीं होता।

उचित चित्र का उपयोग कीजिए।

2. (a) Suppose during the year the consumer price index rises from 150 to 162 and the nominal interest rate is 9 percent. What will be the real interest rate ? 3
- (b) Using the quantity theory of money and the Fisher equation explain in detail how the rate of growth in money affects the nominal interest rate ? 5
- (c) Consider a loanable funds market of an economy. The following equations describe the economy :

$$Y = C + G + I$$

$$Y = 3000$$

$$G = 1000$$

$$T = 1000$$

$$C = 250 + 0.5 (Y - T)$$

$$I = 1000 - 50 r$$

- (i) Find the equilibrium rate of interest and national savings. 3
- (ii) Now suppose the government reduces the taxes to 500. Compute by how much amount do the following change : disposable income, consumption, investment and national savings due to fall in the tax. 4

- (अ) मान लीजिए कि एक वर्ष के दौरान उपभोक्ता कीमत सूचकांक 150 से बढ़कर 162 हो जाता है तथा सांकेतिक ब्याज दर 9 प्रतिशत है। वास्तविक ब्याज दर क्या होगी?
- (ब) मुद्रा का परिमाण सिद्धांत व फीशर समीकरण का उपयोग करके व्याख्या कीजिए कि कैसे मुद्रा वृद्धि दर, सांकेतिक ब्याज दर को प्रभावित करती है?
- (स) एक अर्थव्यवस्था के ऋणयोग्य कोषों के बाजार पर विचार कीजिये। निम्नलिखित समीकरण अर्थव्यवस्था की व्याख्या करते हैं :

$$Y = C + G + I$$

$$Y = 3000$$

$$G = 1000$$

$$T = 1000$$

$$C = 250 + 0.5 (Y - T)$$

$$I = 1000 - 50 r$$

- (i) संतुलन ब्याज दर व राष्ट्रीय बचतों को ज्ञात कीजिये।
- (ii) अब मान लीजिए कि सरकार करों को घटाकर 500 करती है। ज्ञात कीजिये कि निम्नलिखित प्रयोज्य आय, उपभोग, निवेश व राष्ट्रीय बचत में करों में कमी के कारण कितना बदलाव आएगा ?
3. (a) Explain how the national wealth of a country can change ? 3
- (b) What is a money multiplier ? Suppose an economy has a monetary base of \$ 20 million. Calculate money supply in the following situations :
- (i) All the money is held as demand deposits and banks hold 20 percent of their deposits as reserves. 5
- (ii) All the money is held as currency. 5
- (c) (i) Define budget surplus. What does negative budget surplus means ? Explain using suitable diagram. 3
- (ii) Explain the effect of increase in government purchase on budget surplus. 4

- (अ) एक देश की राष्ट्रीय सम्पत्ति कैसे बदल सकती है? व्याख्या कीजिये।
- (ब) मुद्रा गुणक क्या है? मान लीजिए कि एक अर्थव्यवस्था के पास 20 मिलियन डॉलर का मौद्रिक आधार है। निम्नलिखित परिस्थिति में मुद्रा पूर्ति ज्ञात कीजिए :
- (i) सभी मुद्रा मांग जमा के रूप में है तथा बैंक अपनी जमाओं का 20 प्रतिशत रिजर्व के रूप में रखता है।
- (ii) सभी मुद्रा करेन्सी के रूप में है।
- (स) (i) बजट आधिक्य को परिभाषित कीजिये। ऋणात्मक बजट आधिक्य का क्या अर्थ है? उचित चित्र का उपयोग करके व्याख्या कीजिये।
- (ii) बजट आधिक्य पर सरकारी क्रय में वृद्धि के प्रभाव की व्याख्या कीजिये।
4. (a) The following data is given for an economy for the year 2015. How each of the following transactions would affect the GDP and why ? 3
- (i) Rs. 20 lakh is paid as interest on the national debt.

- (ii) Ice-cream maker began the year with Rs. 10,000 worth of milk in his factory and at the end of the year he is holding Rs. 11,000 worth of milk.
- (b) Suppose a bond pays \$ 1000 in one year.
- (i) Calculate the price of the bond when interest rate is (i) 5 percent and (ii) 10 percent. 2
- (ii) What will be rate of interest if the price of bond is, \$ 500 and \$ 800 ? 3
- (c) (i) What do you mean by crowding out ? Explain using a suitable diagram. 3
- (ii) When the demand for real money balances is less responsive to the rate of interest, crowding out is more. Explain using suitable diagram. 4
- (अ) वर्ष 2015 में एक अर्थव्यवस्था के लिए निम्नलिखित आँकड़े दिए गए हैं। निम्नलिखित में से प्रत्येक GDP को किस प्रकार प्रभावित करता है व क्यों?
- (i) राष्ट्रीय ऋण पर दिए गए ब्याज के रूप में 20 लाख रुपये।

- (ii) एक आइसक्रीम निर्माता अपनी फैक्ट्री में 10,000 रुपये मूल्य के दूध के साथ आरम्भ करता है तथा वर्ष के अंत में 11,000 रुपये मूल्य का दूध उसके पास होता है।
- (ब) एक वर्ष में एक बाँड 1,000 डालर देने का वचन देता है।
- (i) बाँड की कीमत की गणना कीजिये जब ब्याज दर (i) 5 प्रतिशत है व (ii) 10 प्रतिशत है।
- (ii) बाँड पर ब्याज दर क्या होगी, यदि आज उसकी कीमत 500 डॉलर व 800 डॉलर है।
- (स) (i) क्राउडिंग आउट से आपका क्या अर्थ है? उपयुक्त चित्र का उपयोग कीजिये।
- (ii) जब वास्तविक मुद्रा शेष के लिए माँग ब्याज दर के प्रति कम संवेदनशील होती है तो क्राउडिंग आउट अधिक होता है। उपयुक्त चित्र का उपयोग करके व्याख्या कीजिये।
5. (a) What are components of current account of the Balance of Payment of a country ? 3

- (b) Assume that the demand for real money balances is represented by the following :

3.2

$$M/P=Y [0.4 - (r + \text{expected inflation})]$$

Where; Nominal Income (Y) = Rs. 4,000

Real interest rate (r) = 8 percent

Expected inflation = 12 percent is constant in short-run

- (i) Calculate Seignorage, if the rate of growth of nominal money is 20 percent forever.
- (ii) Calculate the inflation tax when actual inflation equals 12 percent. Is it equal to Seignorage ?
- (c) (i) What is liquidity trap ? Is monetary policy ineffective in this case ? 3
- (ii) Explain why the income tax system or social security system are considered automatic stabilizers ? 4

(अ) एक देश के भुगतान शेष के चालू खाते के घटक क्या हैं ?

(ब) मान लीजिए कि वास्तविक मुद्रा शेष के लिए माँग निम्नलिखित द्वारा प्रस्तुत की गई है :

$$M/P=Y [0.4 - (r + \text{expected inflation})]$$

जहाँ सांकेतिक आय (Y) = 4,000 रुपये

वास्तविक ब्याज दर (r) = 8 प्रतिशत

अपेक्षित स्फीति = 12 प्रतिशत अल्पकाल में स्थिर है।

(i) सैनोरेज ज्ञात कीजिये यदि सांकेतिक मुद्रा की वृद्धि दर सदैव के लिए 20 प्रतिशत है।

(ii) स्फीति कर ज्ञात कीजिये जब वास्तविक स्फीति 12 प्रतिशत है। क्या यह सैनोरेज के बराबर है?

(स) (i) तरलता जाल क्या है? क्या इस स्थिति में मौद्रिक नीति अप्रभावशाली होती है?

(ii) व्याख्या कीजिये क्यों आयकर प्रणाली व सामाजिक सुरक्षा प्रणाली को स्वचालित स्टेबलाइजर्स माना जाता है?

6. (a) Explain how each of the following transactions would enter the balance of payment account of India : 3

(i) The Reserve Bank of India purchases dollars and sells rupee to American bank.

(ii) Indian hotel is sold to Italian investor.

(b) Does Hyperinflation die a natural death or a stabilization programme is required ? What are the elements of stabilization programme ? Also explain the costs associated with such programmes. 5

(c) Given the following information :

Consumption  $C = 270 + 0.80Y_d; Y_d = Y - T$

Investment  $I = 480 - 6i$

Government expenditure  $G = 120$

Tax  $T = 150$

Price level  $P = 3$

Nominal Money Supply  $M = 900$

Demand for money  $L = 0.2Y - 4i$

Full employment level of income  $Y_f = \text{Rs. } 3,000$ .

(i) Compute the Monetary and Fiscal policy multipliers.

(ii) Compute the increase in the nominal supply of money required to achieve full employment.

(iii) Compute the increase in government expenditure required to achieve full employment. 3,2,2

(अ) निम्नलिखित में से प्रत्येक लेन-देन भारत के भुगतान शेष खाते में कैसे शामिल किए जायेंगे व्याख्या कीजिये।

(i) अमरिकी बैंक से भारतीय रिजर्व बैंक द्वारा खरीदे गए रुपये व बेचे गए डालर।

(ii) इटैलियन निवेशक को बेचा गया भारतीय होटल।

(ब) क्या अति स्फीति प्राकृतिक रूप से खत्म हो सकती है या फिर इसके लिए स्टेबलाइजेशन कार्यक्रम की आवश्यकता होती है? स्टेबलाइजेशन कार्यक्रमों के साथ जुड़ी हुई लागतों की भी व्याख्या कीजिये।

(स) निम्नलिखित आँकड़े दिए गए हैं :

उपभोग  $C = 270 + 0.80Y_d; Y_d = Y - T$

निवेश  $I = 480 - 6i$

सरकारी व्यय  $G = 120$

कर  $T = 150$

कीमत स्तर  $P = 3$

सांकेतिक मुद्रा पूर्ति  $M = 900$

मुद्रा के लिए माँग  $L = 0.2Y - 4i$

आय का पूर्ण रोजगार स्तर  $Y_f = \text{Rs. } 3000$ . रुपये

(i) मौद्रिक व राजकोषीय नीति गुणक का मूल्य ज्ञात कीजिये।

(ii) पूर्ण रोजगार प्राप्त करने के लिए आवश्यक सांकेतिक मुद्रा की पूर्ति में वृद्धि को ज्ञात कीजिये।

(iii) पूर्ण रोजगार प्राप्त करने के लिए आवश्यक सरकारी व्यय में वृद्धि को ज्ञात कीजिये।

7. (a) Why are exports added and imports deducted when we calculate GDP with expenditure approach ? 3

(b) How is the rate of interest determined by the demand and supply of money (assuming no banks in economy)?

What happens to the interest rate if :

(i) Nominal income falls.

(ii) Central bank chooses for expansionary open market operations.

(c) Explain whether an exogenous increase in price of oil will shift the short-run aggregate supply curve or aggregate demand. What are the policy options available for the macroeconomist working with the government to minimise effect of these events on the economy ?  
Use a suitable diagram. 7

(अ) व्यय विधि द्वारा GDP की गणना करते समय क्यों निर्यातों को जोड़ा जाता है व आयातों को घटाया जाता है।

(ब) मुद्रा की माँग व पूर्ति के द्वारा ब्याज दर कैसे निर्धारित होती है (मानिए अर्थव्यवस्था में कोई बैंक नहीं है) ब्याज दर का क्या होगा यदि :

(i) सांकेतिक आय घटती है।

(ii) केन्द्रीय बैंक विस्तारक खुले बाजार प्रक्रिया का चुनाव करता है।

(स) व्याख्या कीजिये कि क्या तेल की कीमतों में बाहरी वृद्धि अल्पकाल सामूहिक पूर्ति वक्र या सामूहिक माँग वक्र को खिसकाता है। अर्थव्यवस्था पर इन घटनाओं के प्रभाव को कम करने के लिए सरकार के साथ काम करने वाले समष्टिगत अर्थशास्त्रियों के लिए पॉलिसी के क्या विकल्प उपलब्ध हैं? उपयुक्त चित्र का उपयोग कीजिये।

This question paper contains 16 printed pages

Roll No.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

S. No. of Question Paper : 4645

Unique Paper Code : 12271202

Name of the Paper : **Mathematical Methods for  
Economics-II**

Name of the Course : **B.A. (Honours) Economics—CBCS**

Semester : **II**

Duration : **3 Hours**

Maximum Marks : **75**

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

Note :— Answers may be written *either* in English *or* in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी : इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

Answer *all* questions. Choice is available within each question.

Use of simple calculator is permitted.

सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

सभी प्रश्नों के भीतर चयन उपलब्ध है।

साधारण कैल्कुलेटर का प्रयोग मान्य है।



1. Attempt any *four* from the parts (a) to (e) in this question : 4×6

(a) (i) For any two vectors  $x$  and  $y$  in  $\mathbf{R}^n$ , prove that

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

(ii) Find the equation of the plane through the point

$(-1, 2, -5)$  that is perpendicular to the planes

$$2x - y + z = 1 \text{ and } x + y - 2z = 3.$$

(b) (i) Does the following set of vectors span  $\mathbf{R}^3$ ? Why or why not?

$$v_1 = (4, 8, 0), v_2 = (2, 3, 1), v_3 = (3, 4, 2),$$

$$v_4 = (1, 0, 1).$$

What is the minimum number of vectors required to span  $\mathbf{R}^3$ ?

(ii) Prove that if a matrix  $A$  is orthogonal, then the determinant of  $A$  is  $\pm 1$ . Prove also that the converse is not true.

(c) A system of linear simultaneous equations is given by :

$$x + 2y = 10; 3x + 6y = p; qx + 8y = 40.$$

(i) Find the conditions on  $p$  and  $q$  for the system to be consistent.

(ii) In each case, specify the degrees of freedom of this system and how many of the equations are superfluous?

(d) (i) Prove that if a linear system of equations has more than one solution, then it has infinitely many solutions.

(ii) An orthogonal matrix is a non-singular matrix  $A$  such that  $A^T = A^{-1}$ . Show that the determinant of an orthogonal matrix is  $\pm 1$ .

(e) (i) Define the property of linear independence for a set of vectors  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

(ii) Prove that the set of non-zero vectors  $\{x_1, x_2, x_3\}$  is linearly independent if the three vectors are pair-wise orthogonal.

इस प्रश्न में भाग (a) से (e) में से किन्हीं चार के उत्तर दीजिए :

(a) (i)  $\mathbf{R}^n$  में किन्हीं दो सदिशों  $x$  व  $y$  हेतु सिद्ध कीजिए कि  $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ .

(ii) बिन्दु  $(-1, 2, -5)$  से गुजरने वाले इस समतल (plane) का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों  $2x - y + z = 1$  व  $x + y - 2z = 3$  के लम्बवत् (perpendicular) है।

(b) (i) क्या सदिशों का निम्नलिखित समुच्चय  $\mathbf{R}^3$  को पाटा (span) है ? क्यों या क्यों नहीं ?

$$v_1 = (4, 8, 0), v_2 = (2, 3, 1), v_3 = (3, 4, 2),$$

$$v_4 = (1, 0, 1).$$

$\mathbf{R}^3$  को पाटने हेतु आवश्यक सदिशों की न्यूनतम संख्या क्या है ?

(ii) सिद्ध कीजिए कि यदि एक आव्यूह  $A$  लम्बवत् (orthogonal) है, तो  $A$  का सारणिक (determinant)  $\pm 1$  होगा। यह भी सिद्ध कीजिए कि इसका विपरीत सत्य नहीं होता।

(c) रेखीय युगपत समीकरणों का एक निकाय निम्न प्रकार है :

$$x + 2y = 10; 3x + 6y = p; qx + 8y = 40.$$

(i)  $p$  व  $q$  पर उन शर्तों को ज्ञात कीजिए जो कि इस निकाय के संगत (consistent) होने हेतु आवश्यक हैं।

(ii) प्रत्येक मामले में इस निकाय की स्वातन्त्र्य कोटियाँ बताइए व यह भी बताइए कि कितने समीकरण अनावश्यक (superfluous) हैं ?

(d) (i) सिद्ध कीजिए कि यदि एक समीकरण निकाय के एक से अधिक हल हैं तो इसके हलों की संख्या अनन्त है।

(ii) एक लम्बवत् (orthogonal) आव्यूह (matrix) एक ऐसा अविलक्षण (non-singular) आव्यूह  $A$  होता है जिसके लिए  $A^T = A^{-1}$ । दर्शाइए कि एक लम्बवत् आव्यूह के सारणिक (determinant) का मान  $\pm 1$  होता है।

- (e) (i) सदिशों के एक समुच्चय  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  हेतु रैखिक स्वतन्त्रता (linear independence) के गुण को परिभाषित कीजिए।
- (ii) सिद्ध कीजिए कि अशून्य सदिशों का एक समूह  $\{x_1, x_2, x_3\}$  रैखिकतः स्वतन्त्र होता है यदि ये तीन सदिश युग्मवार (pair-wise) लम्बवत् हों।

2. Attempt any two from the parts (a) to (c) in this question : 2×5

- (a) (i) The equation  $xy + 2yz + 3z^2 = 6$  implicitly defines  $z$  as a function of  $x$  and  $y$ . Find the directional derivative of the function in the direction  $(2, 5)$  at the point  $(1, 1, 1)$ .
- (ii) Find the value of the second order direct partial derivative of  $z$  with respect to  $y$  for the function in (i) above at  $(1, 1, 1)$ .
- (b) (i) Calculate the rate of change in  $z$  at  $t = 0$  if
- $$z = \frac{5t^2 + 3xy}{2w^2y}, \quad x = t^2 + 1, \quad y = \sqrt{t^2 + 1},$$
- $$w = e^t + 1.$$

- (ii) Show that the equation of the tangent plane at the point  $(x_1, y_1, z_1)$  on the surface  $z = \sqrt{xy}$  is given by  $y_1x + x_1y - 2z_1z = 0$ .
- (c) (i) Draw the level curve for the function  $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$  passing through  $(3, 5)$ . Find the unit vector perpendicular to the level curve at this point.
- (ii) State and sketch the domain for the function  $f(x, y) = \sqrt{y - x} \ln(y + x)$ .

इस प्रश्न में भाग (a) से (c) में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए :

- (a) (i) समीकरण  $xy + 2yz + 3z^2 = 6$  परोक्ष रूप से  $z$  को  $x$  व  $y$  के फलन के रूप में परिभाषित करता है। इस फलन का बिन्दु  $(1, 1, 1)$  पर दिशा  $(2, 5)$  में दिशात्मक अवकलज (directional derivative) ज्ञात कीजिए।

(ii) भाग (i) में दिए गए फलन हेतु बिन्दु  $(1, 1, 1)$  पर  $z$  का  $y$  के सापेक्ष द्वितीय क्रम का आंशिक अवकलज ज्ञात कीजिए।

(b) (i) यदि  $z = \frac{5t^2 + 3xy}{2w^2y}$ ,  $x = t^2 + 1$ ,  $y = \sqrt{t^2 + 1}$ ,  $w = e^t + 1$  हो, तो  $t = 0$  पर  $z$  में परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

(ii) दर्शाइए कि सतह (surface)  $z = \sqrt{xy}$  के बिन्दु  $(x_1, y_1, z_1)$  पर स्पर्शी समतल (tangent plane) का समीकरण  $y_1x + x_1y - 2z_1z = 0$  है।

(c) (i) फलन  $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$  के  $(3, 5)$  से गुजरने वाले स्तर वक्र (level curve) को आरेखित कीजिए। इस बिन्दु पर स्तर वक्र के लम्बवत् इकाई सदिश ज्ञात कीजिए।

(ii) फलनों  $f(x, y) = \sqrt{y - x} \ln(y + x)$  हेतु domain (परास) को लिखिए व आरेखित कीजिए।

3. Attempt any two from the parts (a) to (c) in this question :  $2 \times 6$

(a) (i) An equilibrium model of labour demand and output pricing leads to the system of equations :  $Pf'(L) - w = 0$  and  $Pf(L) = wL + c$ , where  $f$  is twice differentiable with  $f'(L) > 0$  and  $f''(L) < 0$ . All the variables are positive. Regard  $w$  and  $c$  as exogenous so that  $P$  and  $L$  are endogenous variables which are functions of  $w$  and  $c$  around the point  $A(w, c, P, L) = (w_0, c_0, P_0, L_0)$ . Find expressions for  $\frac{\partial P}{\partial w}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial c}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial w}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial c}$  by implicit differentiation.

(ii) For the function  $L(w, c)$  in (i), find an approximation to  $L(w, c)$  at  $(w_1, c_1)$  close to  $(w_0, c_0)$ .

(b) (i) State the definition of a homothetic function.

- (ii) Are the functions  $f$  and  $g$  are homothetic. Give reasons.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A(\delta_1 x_1^{-\rho} + \delta_2 x_2^{-\rho} + \dots + \delta_n x_n^{-\rho})^{-\frac{\mu}{\rho}}$$

$$g(x_1, x_2) = 2 \log x_1 + 5 \log x_2.$$

- (c) (i) For the function  $z = f(x, y) = \left( \frac{0.2}{x} + \frac{0.8}{y} \right)^{-1}$ ,

evaluate the elasticity of substitution and verify

Euler's theorem.

- (ii) Is the sum of two quasi-concave functions necessarily quasi-concave? Why or why not?

इस प्रश्न में भाग (a) से (c) में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए :

- (a) (i) श्रम की माँग व उत्पाद की कीमत के निर्धारण के एक साम्यावस्था मॉडल (equilibrium model) से निम्नलिखित समीकरण निकाय प्राप्त होता है :

$$Pf'(L) - w = 0 \text{ व } Pf(L) = wL + c, \text{ जहाँ } f \text{ दो बार}$$

अवकलनीय (twice differentiable) है, जिसमें  $f''(L) > 0$  व  $f'''(L) < 0$ । सभी चर धनात्मक हैं।

मान लीजिए कि  $w$  व  $c$  बाह्यजात (exogenous) हैं जिससे कि  $P$  व  $L$  अन्तर्जात चर हैं जो कि बिन्दु

$A(w, c, P, L) = (w_0, c_0, P_0, L_0)$  के आसपास  $w$  व  $c$  के फलन हैं। परोक्ष अवकलन (implicit

differentiation) की सहायता से  $\frac{\partial P}{\partial w}, \frac{\partial P}{\partial c}, \frac{\partial L}{\partial w}, \frac{\partial L}{\partial c}$

हेतु व्यंजक ज्ञात कीजिए।

- (ii) भाग (i) में फलन  $L(w, c)$  हेतु  $(w_0, c_0)$  के समीप  $(w_1, c_1)$  पर सन्निकटन ज्ञात कीजिए।

- (b) (i) होमोथेटिक फलन (homothetic function) की परिभाषा लिखिए।

- (ii) निम्नलिखित फलन  $f$  व  $g$  होमोथेटिक हैं या नहीं, इसका निर्धारण करने हेतु कारण दीजिए :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A(\delta_1 x_1^{-\rho} + \delta_2 x_2^{-\rho} + \dots + \delta_n x_n^{-\rho})^{-\frac{\mu}{\rho}}$$

$$g(x_1, x_2) = 2 \log x_1 + 5 \log x_2.$$

- (c) (i) फलन  $z = f(x, y) = \left( \frac{0.2}{x} + \frac{0.8}{y} \right)^{-1}$  हेतु प्रतिस्थापन की लोच (elasticity of substitution) ज्ञात कीजिए व आयलर के प्रमेय (Euler's theorem) को सत्यापित कीजिए।
- (ii) क्या दो अर्द्ध-अवतल (quasi-concave) फलनों का योगफल निश्चित तौर पर अर्द्ध-अवतल होता है ? क्यों या क्यों नहीं ?

4. Attempt any *three* from the parts (a) to (d) in this question : 3×7

- (a) Find the critical points and classify them as local maxima, local minima and saddle point for the function  $f(x, y) = (x^2 + 2y) \cdot e^{-(x^2 + y^2)}$ .
- (b) Find the maxima and minima of the function  $g(x, y) = (2x + 4) e^{x^2 - x} (2y - 1) e^{(y - 2)^2}$  defined on the set S where S is rectangular region with vertices (0, 0), (0, 1), (2, 1) and (2, 0).

- (c)  $x(a, b) = A\sqrt{ab}$  is a production function for good  $x$  using inputs  $a$  and  $b$ . Use the Lagrangian method to find the amount of the factors required to produce an output  $\bar{x}$  at minimum cost, when prices of the inputs are  $p_a$  and  $p_b$ . Check the second order conditions and verify the envelope theorem.
- (d) Find the closest point to the origin on the curve given by the equation  $x^2 + xy = 1$ ,  $x > 0$ . Also calculate the minimum distance. What is the rate of change in this distance as the constant 1 in the equation of the curve increases marginally.

इस प्रश्न में भाग (a) से (d) में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिए :

- (a) फलन  $f(x, y) = (x^2 + 2y) \cdot e^{-(x^2 + y^2)}$  हेतु क्रान्तिक बिन्दुओं (critical points) को ज्ञात कीजिए तथा इन्हें स्थानीय उच्चिष्ठ (local maxima), स्थानीय निम्निष्ठ (local minima) व काठी बिन्दु (saddle point) के तौर पर वर्गीकृत कीजिए।

(b) समुच्चय S पर परिभाषित फलन

$$g(x, y) = (2x + 4)e^{x^2 - x} (2y - 1)e^{(y-2)^2}$$

हेतु उच्चिष्ठ (maxima) व निम्निष्ठ (minima) ज्ञात कीजिए जहाँ S, शीर्ष

बिन्दुओं (vertices) (0, 0), (0, 1), (2, 1) व (2, 0) वाला आयताकार

क्षेत्र (rectangular region) है।

(c)  $x(a, b) = A\sqrt{ab}$ , आगतों a व b की सहायता से वस्तु x

का उत्पादन फलन है। उत्पाद की मात्रा  $\bar{x}$  का न्यूनतम

लागत पर उत्पादन करने हेतु आवश्यक कारकों (factors)

की मात्राएँ लैग्रान्जियन विधि (Lagrangian method) की सहायता

से ज्ञात कीजिए, यदि आगतों की कीमतें  $p_a$  व  $p_b$  हैं। द्वितीय

क्रम की शर्तों की जाँच कीजिए व आवरण प्रमेय (envelope

theorem) को सत्यापित कीजिए।

(d) समीकरण  $x^2 + xy = 1$ ,  $x > 0$  द्वारा निर्धारित वक्र पर मूल

बिन्दु (origin) के समीपतम स्थित बिन्दु को ज्ञात कीजिए।

इस न्यूनतम दूरी को भी ज्ञात कीजिए। समीकरण के स्थिरांक

1 में मामूली परिवर्तन से इस न्यूनतम दूरी में परिवर्तन की

दर क्या है ?

5. Attempt any two from the parts (a) to (c) in this question :  $2 \times 4$

(a) Show that the function  $y = (x + 1) - \frac{e^x}{3}$  is a solution

to the differential equation  $\frac{dy}{dx} = y - x$ , which satisfies

the initial condition  $y(0) = \frac{2}{3}$ . Sketch the solution.

(b) For the differential equation  $\frac{dy}{dt} = y^2 - y - 6$ , draw

the phase diagram and identify the equilibrium values.

Identify which of the equilibria are stable.

(c) Verify whether the sets A and B are convex :

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 16, x^2 + y^2 \geq 4\}$$

$$B = \{(x, y) \mid y \geq \frac{2x+5}{x+2}, x > 0\}.$$

इस प्रश्न में भाग (a) से (c) में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए :

(a) दर्शाइए कि फलन  $y = (x + 1) - \frac{e^x}{3}$ , अवकल समीकरण

(differential equation)  $\frac{dy}{dx} = y - x$  का एक हल है, जो

कि प्रारम्भिक शर्त (initial condition)  $y(0) = \frac{2}{3}$  को सन्तुष्ट

करता है। इस हल को आरेखित (sketch) कीजिए।

- (b) अवकल समीकरण  $\frac{dy}{dt} = y^2 - y - 6$  हेतु प्रावस्था आरेख (phase diagram) बनाइए तथा साम्यावस्था बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए। कौनसी साम्यावस्थाएँ स्थायी हैं, पहचान कीजिए।
- (c) समुच्चय A व B क्या उत्तल (convex) हैं, सत्यापित कीजिए :

$$A = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 16, x^2 + y^2 \geq 4 \right\}$$

$$B = \left\{ (x, y) \mid y \geq \frac{2x + 5}{x + 2}, x > 0 \right\}.$$